Prof. Dr. Armin Iske
Dr. Andreas Vollmer
M.Sc. Lars Poppe

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
Wintersemester 2022/23

Übungen zu Analysis 1

Aufgaben des Tages 2 — Musterlösung

Aufgabe 1: *(1+1+2+1 Punkte)* Seien A, B Mengen. *Die symmetrische Differenz* $A\Delta B$ von A und B ist gegeben durch

$$A\Delta B := (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$$

(a) Veranschauliche die Definition von $A\Delta B$ durch eine Skizze.

(b) Gilt $A\Delta B = B\Delta A$? Begründe mit Hilfe der Tautologien der Aussagenlogik.

(c) Gilt $A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$? Begründe mit Hilfe der Tautologien der Aussagenlogik.

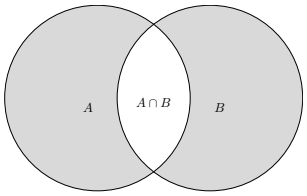
(d) Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Menge A_n durch

$$A_n := \{q \in \mathbb{N} \ : \ q \text{ ist ein Teiler von } n\}\,.$$

Bestimme $A_{17}\Delta A_{41}$.

Lösung.

(a) Beispiel einer möglichen Skizze:



(b) Ja, es gilt $A\Delta B = B\Delta A$. Nach Definition der symmetrischen Differenz gilt nämlich

$$\begin{aligned} x \in A\Delta B &\Leftrightarrow x \in (A\backslash B) \cup (B\backslash A) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \\ &\Leftrightarrow (x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \notin B) \\ &\Leftrightarrow x \in (B\backslash A) \cup (A\backslash B) \\ &\Leftrightarrow x \in B\Delta A\,, \end{aligned}$$

wo wir ansonsten nur die aus der Vorlesung bekannten Tautologien verwendet haben.

(c) Ja, es gilt $A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$, denn für beliebige Mengen M, A, B:

$$\begin{aligned}
x \in A\Delta B &\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \vee (x \in B \wedge x \notin A)) \wedge (x \notin B \vee (x \in B \wedge x \notin A)) \\
&\Leftrightarrow ((x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin A)) \wedge ((x \notin B \vee x \in B) \wedge (x \notin B \vee x \notin A)) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge (x \notin A \cap B) \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)
\end{aligned}$$

(d) Da 17 und 41 Primzahlen sind, gilt $A_{17} = \{1, 17\}$ und $A_{41} = \{1, 41\}$. Mit der Aussage aus Teil (c) ist also

$$A_{17}\Delta A_{41} = \{1, 17\}\Delta\{1, 41\} = \{1, 17, 41\} \setminus \{1\} = \{17, 41\}$$

■

Aufgabe 2: *(1+1+3 Punkte)* In der heutigen Vorlesung wurde die *Mächtigkeit* der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ diskutiert. Zur Illustration wurde das scheinbar paradoxe Gedankenexperiment des *Hilbert-Hotels* — nach dem Göttinger Mathematiker David Hilbert (1862-1943) — besprochen.

Demnach hat das Hilbert-Hotel *abzählbar unendlich viele* Zimmer, durchnummiert mit den natürlichen Zahlen bei der Eins beginnend. Sind alle Zimmer im Hilbert-Hotel belegt, so können dennoch *endlich viele* neue Gäste im Hilbert-Hotel untergebracht werden. Weiterhin wurde in der Vorlesung erklärt, wie man im Hilbert-Hotel sogar für *abzählbar unendlich viele* neue Gäste Platz schaffen kann.

Erkläre nun, wie man im Hilbert-Hotel Platz schaffen kann für

(a) *abzählbar unendlich viele* neue Gäste, die in *endlich vielen* voll besetzten Bussen mit jeweils *abzählbar unendlich vielen* Sitzplätzen ankommen.

(b) *abzählbar unendlich viele* neue Gäste, die in *abzählbar unendlich vielen* voll besetzten Bussen mit einer festen Anzahl an *endlich vielen* Sitzen ankommen, d.h. in jedem dieser voll besetzten Bussen sitzen genau $N \in \mathbb{N}$ Fahrgäste.

(c) *abzählbar unendlich viele* neue Gäste aus *abzählbar unendlich vielen* vollen Bussen.

Gib zu den drei Fällen (a)-(c) jeweils eine passende Abbildungsvorschrift an, mit der

- der Umzug der aktuellen Gäste im Hilbert-Hotel beschrieben wird;
- der Einzug der neuen Gäste in das Hilbert-Hotel beschrieben wird.

Lösung.

(a) Sei $N \in \mathbb{N}$ die Anzahl der ankommenden Busse.

Umzug der aktuellen Gäste. Die aktuellen Gäste ziehen mit der Abbildungsvorschrift

$$k \longmapsto (N+1) \cdot k \qquad \text{für } k \in \mathbb{N}$$

um. Damit entstehen zwischen zwei aktuellen Gästen Lücken von N freien Zimmern. Außerdem sind die ersten N Zimmer frei.

Einzug der neuen Gäste. Wir kodieren die Sitzplätze der neuen Gäste *eineindeutig* mit 2-tupeln, wobei durch (m, ℓ), für $1 \leq m \leq N$ und $\ell \in \mathbb{N}$, der ℓ-te Sitzplatz im m-ten Bus bezeichnet wird. Den Einzug der neuen Gäste aus den N Bussen in das Hilbert-Hotel beschreiben wir mit der Abbildung

$$(m, \ell) \longmapsto (\ell - 1) \cdot (N+1) + m \qquad \text{für } 1 \leq m \leq N \text{ und } \ell \in \mathbb{N},$$

d.h. der Fahrgast auf Platz (m, ℓ) zieht in Zimmer $(\ell - 1) \cdot (N+1) + m$ ein.

Danach sind alle Zimmer im Hilbert-Hotel belegt.

(b) Wir führen die Lösung auf Teil (a) zurück. Hierzu vertauschen wir in der Kodierung der neuen Gäste die Rollen von m und ℓ. Dabei seien $m = 1, \ldots, N$ die Sitzplätze in jedem Bus, und $\ell \in \mathbb{N}$ der ℓ-te Bus. Dann wird der Umzug der aktuellen Gäste und der Einzug der neuen Gäste genauso beschrieben wie in (a). Insbesondere sind danach alle Zimmer im Hilbert-Hotel belegt.

(c) **Umzug der aktuellen Gäste.** Die aktuellen Gäste ziehen mit der Abbildungsvorschrift

$$k \longmapsto 2k - 1 \qquad \text{für } k \in \mathbb{N}$$

in die *ungeraden* Zimmer um. Damit sind alle *geraden* Zimmer frei.

Einzug der neuen Gäste. Wir bringen nun die Fahrgäste aus den Bussen wie folgt in den *geraden* Zimmern des Hilbert-Hotels unter.

Dabei bezeichnet $m \in \mathbb{N}$ den m-ten Bus. Die Sitzplätze in den Bussen versehen wir jeweils mit *ungeraden* Platznummern $\ell = 1, 3, 5, 7, \ldots$. So kann der Sitzplatz des ℓ-ten Fahrgastes aus dem m-ten Bus als 2-tupel (m, ℓ) *eineindeutig* kodiert werden, wobei $m \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und $\ell \in \mathbb{N}$ eine ungerade natürliche Zahl ist.

Den Einzug der Fahrgäste aus den Bussen in das Hilbert-Hotel beschreiben wir mit der Abbildung

$$(m, \ell) \longmapsto 2^m \cdot \ell \qquad \text{für } m \in \mathbb{N} \text{ und ungerades } \ell \in \mathbb{N},$$

d.h. der Fahrgast auf Platz (m, ℓ) zieht in Zimmer $2^m \cdot \ell$ ein.

Sind nun alle Zimmer im Hilbert-Hotel belegt? Schließlich überzeugen wir uns von den folgenden Eigenschaften der Einzugsabbildung $(m, \ell) \longmapsto 2^m \cdot \ell$:

- Die neuen Gäste ziehen nur in gerade Zimmer, denn $2^m \cdot \ell$ ist für $m \in \mathbb{N}$ gerade.
- Nach Einzug der neuen Gäste sind *alle* geraden Hotelzimmer belegt: Jede gerade Zimmernummer n besitzt nämlich eine (eindeutige) Primfaktorzerlegung der Form $n = 2^m \cdot p_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot p_i^{r_i}$, wobei $p_1, \ldots, p_i$ paarweise verschiedene *ungerade* Primzahlen mit zugehörigen Exponenten $r_1, \ldots, r_i \in \mathbb{N}$ sind. Das Produkt $\ell := p_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot p_i^{r_i}$ der Primzahlpotenzen ist ungerade, daher zieht Fahrgast (m, ℓ) in Zimmer n ein.

■